SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

U. MASSARI

IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE DELLE SUPERFICI MINIME

28 APRILE 1983

In questo seminario saranno esposti alcuni risultati classici sul problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime.

L'operatore delle superfici minime è il seguente:

$$Mu = \sum_{i=1}^{n} D_i \frac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(1+|Du|^2)\,\delta_{ij} - D_i u\, D_j u}{(1+|Du|^2)^{3/2}} D_i D_j u$$

Esso è quindi un operatore quasi-lineare, ellittico, del secondo ordine e del tipo della divergenza.

Il problema di Dirichlet per M è il problema di trovare $u \in C^2(\Omega) \cap C^\circ(\overline{\Omega})$ tale che:

$$(*) \qquad \begin{cases} Mu = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di R^n e ϕ: $\partial\Omega \to R$ è una funzione continua assegnata.

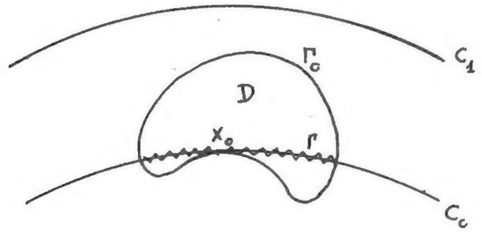
Lo studio di questo problema è cominciato con Bernstein (1910) [1] e i primi risultati di esistenza sono stati provati da Haar (1927) [4] e Radò (1930) [8].

Haar provò che se $\Omega \subset R^2$ è convesso, allora (*) ha un'unica soluzione, qualunque sia il dato continuo ϕ.

Nel caso n = 2, la condizione che Ω sia convesso è pure necessaria se si vuol avere soluzione qualunque sia il dato ϕ. Questo fu notato da R. Finn in un lavoro del 1965 [2]. Finn dimostrò il seguente principio di massimo:

"Sia $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$ con $\Gamma \in C^1$; se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^2(\Omega) \cap C^\circ(\overline{\Omega})$ e $Mv \leq Mu$, $u \leq v$ su Γ_0 $\frac{\partial v}{\partial \nu} = +\infty$ in Γ (ν normale esterna); allora $u \leq v$ in Ω".

Ora se $\Omega \subset R^2$ è limitato e non convesso, esiste un punto $x_0 \in \partial\Omega$ come in figura:



Indichiamo ora con r, R rispettivamente i raggi delle circonferenze C_0 e C_1, con ρ la distanza di (x,y) dal centro comune di C_0 e C_1 e con

$$D = \{(x,y) \in \Omega \ , \quad r < \rho < R\}$$

La catenoide:

$$v(x,y) = R \lg \frac{R + \sqrt{R^2 - r^2}}{R} - r \lg \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - r^2}}{r}$$

verifica le condizioni $Mv = 0$ in D, $\frac{\partial v}{\partial \nu} = +\infty$ in $\Gamma = C_0 \cap \Omega$, $v \geq o$ in $\Gamma_0 = \partial\Omega \cap D$. Per il principio di massimo precedentemente enunciato ogni soluzione u del problema di Dirichlet con $\phi \equiv 0$ in Γ_0 deve verificare $u \leq v$ in Ω. Allora se $\phi \equiv 0$ in Γ_0 e $\phi(x_0) > v(x_0) = R \lg \frac{R+\sqrt{R^2-r^2}}{R}$, il problema di Dirichlet con dato ϕ non ha soluzione.

Nel caso $n > 2$ la situazione è diversa: la convessità di Ω è ancora sufficiente per avere soluzione del problema (vedi Gilbarg e Stampacchia 1963 [3], [9]), ma non è più necessaria nel senso dell'osservazione di Finn.

Nel 1968 Jenkins-Serrin provarono che per $n \geq 2$ l'ipotesi giusta è che la curvatura media di $\partial\Omega$ sia non negativa. In [5], essi provarono il seguente:

Teorema 1. Se $\partial\Omega \in C^3$ e curvatura media di $\Omega \geq 0$ in ogni punto, allora esiste una unica soluzione del problema (*) per ogni dato $\phi \in C^2(\partial\Omega)$.

Inoltre se $\partial\Omega \in C^2$ ed esiste un punto $x_0 \in \partial\Omega$ dove la curvatura media è negativa, allora esiste un dato continuo ϕ tale che il problema (*) non ha soluzione.

Jenkins e Serrin, nella loro dimostrazione, usano un teorema di punto fisso di Leray-Schauder. Posto $a_{ij}(p) = (1 + |p|^2)\,\delta_{ij} - p_i\, p_j$, se $v \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, il problema di Dirichlet:

$$(**)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(Dv)\, D_i D_j u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases}$$

essendo ora un problema uniformemente ellittico, ha una soluzione unica $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, inoltre

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c \|\phi\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}$$

(la costante c dipende da Ω e dalla norma $\|v\|_{C^{1,\alpha}}$). Ne segue che l'applicazione:

$$T : C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \qquad \text{definita da } Tv = u$$

è compatta (manda insiemi limitati di $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ in insiemi limitati di $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$

e quindi relativamente compatti in $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$).

Per un teorema di Leray-Schauder (vedi [6]) se $\exists$ $M > 0$ tale che ogni soluzione $v \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ dell'equazione $v = \tau Tv$ con $\tau \in [0,1]$ ha norma $\|v\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq M$, allora T ha un punto fisso e quindi (*) ha una soluzione.

La dimostrazione dell'esistenza si riduce a provare quindi che ogni soluzione di:

$$\begin{array}{ll} Mv = 0 & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = \tau\phi & \tau \in [0,1] \end{array}$$

ha norma in $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ maggiorata da una costante indipendente da v. Una tale maggiorazione si ottiene nella seguente maniera:

i) maggiorazione di $\sup_{\Omega}|v|$ in termini di $\sup_{\partial\Omega}|\phi|$ usando il principio di massimo;

ii) maggiorazione di $\sup_{\partial\Omega}|Dv|$ in termini di $\sup_{\Omega}|v|$ usando la tecnica delle barriere;

iii) maggiorazione di $\sup_{\Omega}|Dv|$ in termini di $\sup_{\partial\Omega}|Dv|$ e $\sup_{\Omega}|v|$ usando un principio di massimo per $|Dv|$;

iv) maggiorazione di $\|Du\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}$ per qualche $\alpha \in (0,1)$ in termini di $\sup_{\Omega}|Dv|$ e $\sup_{\Omega}|v|$, usando la tecnica di Ladyzhenskaya-Unaltseva (vedere [6] pag. 277).

Usando la maggiorazione del gradiente per le soluzioni della equazione delle superfici minime, nel teorema 1 si può indebolire l'ipotesi sul dato ϕ richiedendo solo $\phi \in C^{\circ}(\partial\Omega)$, ma la regolarità su $\partial\Omega$ non può essere indebolita.

Questo può essere fatto invece se si studia il problema (*) usando il metodo diretto del calcolo delle variazioni, osservando che l'equazione delle superfici minime è l'equazione di Eulero del funzionale dell'area.

M. Miranda nel 1971 ([7]) ha studiato il seguente funzionale:

$$F(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} + \int_{\partial\Omega} |u - \phi| \, dH_{n-1}$$

con Ω aperto limitato localmente lipschitziano e $\phi \in L^1(\partial\Omega)$, provando il seguente:

<u>Teorema 2</u>. Il funzionale F ha minimo $u \in BV(\Omega)$ (lo spazio delle funzioni a variazione limitata). Tale minimo u è analitico in Ω ed ivi soluzione dell'equazione delle superfici minime inoltre

$$\lim_{y \to x} u(y) = \phi(x)$$

in ogni punto $x \in \partial\Omega$ dove ϕ è continua e la curvatura media di $\partial\Omega$ in x è ≥ 0.

E' chiaro che in questo caso essendo $\partial\Omega$ solo lipschitziana la curvatura media dovrà intendersi in senso debole.

Sia $x \in \partial\Omega$, possiamo supporre esista un aperto U contenente x tale che:

$$\Omega \cap U = \{(x,y) \in U \ , \ \ x \in A \, , y > f(x)\}$$

dove A è un aperto di R^{n-1} e $f\colon A \to R$ è lipschitziana. Ora se f fosse C^2, la curvatura media di $\partial\Omega$ in $(x, f(x))$ sarebbe:

$$\operatorname{div} \frac{Df(x)}{\sqrt{1 + |Df(x)|^2}}$$

e quindi la curvatura di $\partial\Omega$ sarebbe ≥ 0 se e solo se $\forall \psi \in C_0^1(A)$ $\psi \leq 0$:

$$0 \geq \int_A \psi \operatorname{div}\Big(\frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}}\Big) \, dx = - \int_A \frac{D\psi \cdot Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \, dx$$

Da questa diseguaglianza deriva che

$$\int_A \sqrt{1 + |Df|^2}\, dx \leq \int_A \sqrt{1 + |D(f + \psi)|^2}\, dx$$

Usando la funzione caratteristica di Ω e la misura variazione totale della misura vettoriale $D\phi_\Omega$ (derivata di ϕ_Ω nel senso delle distribuzioni), dalla diseguaglianza precedente deriva che:

$$(+) \qquad \int_U |D\phi_\Omega| \leq \int_U |D\phi_{\Omega \cup E}| \qquad \forall\, E \subset\subset U \text{, E misurabile}$$

Noi prenderemo la diseguaglianza (+) come definizione di curvatura di $\partial\Omega$ in $x \geq 0$ (aumentando l'insieme Ω in un intorno di x, il perimetro aumenta).

Nella dimostrazione del teorema 2, l'esistenza di un minimo u è conseguenza immediata del fatto che se $u_j \in BV(\Omega)$ è una successione minimizzante, allora:

$$\int_\Omega |Du_j| + \int_\Omega |u_j|\, dx \leq \text{cost.}$$

e quindi u_j contiene una sottosuccessione convergente in $L_1(\Omega)$ ad una $u \in BV(\Omega)$. Inoltre il funzionale F è semicontinuo rispetto alla convergenza L_1.

La dimostrazione della regolarità di u è più difficile. In primo luogo va osservato che il sottografico di u

$$E = \{(x,y) \in \Omega \times R,\ y < u(x)\}$$

ha perimetro di misura minima nel cilindro $\Omega \times R$ e quindi esiste un aperto $C_0 \subset \Omega \times R$ con $H_{n-1}(\Omega \times R - C_0) = 0$ e tale che $\partial E \cap C_0$ è una varietà analitica n-dimensionale con curvatura media zero.

Verifichiamo in primo luogo che se Ω_0 è la proiezione di C_0

su Ω allora $u|_{\Omega_0}$ è analitica. Basta verificare che $x \in \Omega_0$, la componente n+1-esima $\nu_{n+1}(x)$ del versore normale a ∂E in $(x, u(x))$ è positiva. Infatti supponiamo che in $x_0 \in \Omega_0$ sia $\nu_{n+1}(x_0) = 0$. Si può supporre allora l'esistenza di un intorno $\mathcal{U}$ di $(x_0, u(x_0))$ tale che

$$E \cap \mathcal{U} = \{(x_1, z) \in \mathcal{U},\ u_1 > v(z)\}$$

con v funzione analitica definita in un aperto A di R^n, verificante l'equazione

$$\sum_{ij=2}^{n+1} [(1 + |Dv|^2)\,\delta_{ij} - D_i v\, D_j v]\, D_i D_j v = 0$$

Allora $w = D_{n+1} v$ verifica l'equazione uniformemente ellittica:

$$\sum_{ij=2}^{n+1} [(1 + |Dv|^2)\,\delta_{ij} - D_i v\, D_j v]\, D_i D_j w +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n+1} (2\, D_i v\, \Delta v - 2 \sum_{j=2}^{n+1} D_j v\, D_i D_j v)\, D_j w = 0$$

Inoltre $w = D_{n+1} v = - \dfrac{\nu_{n+1}}{\nu_1} \leq 0$ in A e $w = 0$ in qualche punto di A. Per il principio di massimo forte $w \equiv 0$ in A. Allora $\partial E \cap \mathcal{U}$ fa parte di un cilindro verticale. Siccome ∂E non può contenere un tratto di cilindro verticale illimitato in quanto u risulta localmente limitata in Ω e siccome ∂E si può staccare dal cilindro verticale su cui $\partial E \cap \mathcal{U}$ sta solo in punti singolari si avrebbe $H_{n-1}(\Omega \times R - C_0) > 0$ contro il teorema di regolarità.

D'altra parte se B_ρ è una sfera di Ω con $H_{n-1}(\partial B_\rho \cap (\Omega - \Omega_0)) = 0$ e B_j è una riunione di sfere $\{B_h^{(j)}\}_{h=1,2,\dots,N_j}$ con

$$\partial B_\rho \cap (\Omega - \Omega_o) \subset B_j$$

$$\sum_{h=1}^{N_j} [\text{ raggi } B_h^{(j)}]^{n-1} < \frac{1}{j} \qquad (j = 1,2,\ldots) ;$$

è possibile trovare una successione $\phi_j \in C^2(\partial B_\rho)$ con $\phi_j = u$ in $\partial B_\rho - B_j$ e $\sup_{\partial B_\rho}|\phi_j| \leq 2 \sup_{B_\rho}|u|$.

Se indichiamo con v_j la soluzione dell'equazione delle superfici minime in B_ρ uguale a ϕ_j su ∂B_ρ, la successione v_j è equilimitata. D'altra parte $\rho' < \rho$

$$\sup_{B_{\rho'}}|Dv_j| \leq c \exp \{C \frac{\sup_{B_\rho}|u|}{\rho - \rho'}\}$$

e quindi possiamo supporre, a meno di passare ad una sottosuccessione che $v_j \to v$ uniformemente sui compatti di B_ρ. La funzione limite v è localmente lipschitziana in B_ρ, uguale ad u in $\partial B_\rho \cap \Omega_o$ e minimizza l'integrale dell'area in B_ρ, allora $v = u$ in B_ρ e quindi u è localmente lipschiziana in B_ρ e soluzione debole dell'equazione delle superfici minime. Per classici teoremi di regolarità allora u è analitica.

Resta infine da provare che $\lim_{y \to x} u(y) = \phi(x)$ in ogni punto $x \in \partial\Omega$ dove ϕ è continua e la curvatura media di $\partial\Omega$ in x è ≥ 0.

Supponiamo esista una successione $y_h \in \Omega$ con $y_h \to x \in \partial\Omega$ e $u(y_h) \to l > \phi(x)$. Essendo ϕ continua in x, si può trovare una sfera $(n+1)$-dimensionale B di centro (x,l) con

$$B \cap \text{grafico } \phi = \emptyset$$

E' facile ora, usando il fatto che u minimizza il funzionale F e che il cilindro $\Omega \times R$ ha curvatura media ≥ 0 in (x,l), che il sottografico di u:

$$E = \{(y,t) \in \Omega \times R \ , \ \ t < u(y)\}$$

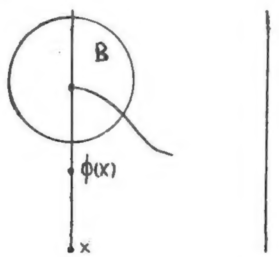
ha frontiera di misura minima in B. Siccome E è contenuto in $\Omega \times R$ che ha curvatura media ≥ 0 in (x,l) e $(x,l) \in \partial E \cap (\partial\Omega \times R)$, per un principio di massimo forte provato da M. Miranda in [7], esiste B' sfera concentrica con B, $B' \subset B$ tale che $\partial E \cap B' = (\partial\Omega \times R) \cap B'$ (E e $\Omega \times R$ coincidono in un intorno di (x,l)).

Questo è in contrasto col fatto che la successione $(y_h, u(y_h)) \in \partial E \cap (\Omega \times R) \cap B'$ (se h è grande).

Con un ragionamento analogo, basato sempre sul fatto che E ha perimetro minimo in B se $B \cap \text{graf } \phi = \emptyset$, si prova che non può essere né $l < \phi(x)$, né $l = +\infty$, né $l = -\infty$. Pertanto deve essere

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} u(y) = \phi(x) \qquad x \in \partial\Omega$$

Infine è da osservare che l'ipotesi che la frontiera di Ω sia lipschitziana può essere tolta. Basta che Ω abbia perimetro finito che valga la diseguaglianza (+).



BIBLIOGRAFIA

[1] BENSTEIN S.: Sur le surfaces définies au moyen de leur caurbure moyenne ou totale. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 27 (1910) 233-256.

[2] FINN R.: Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature. J. d'Analyse Math. 14 (1965) 139-160.

[3] GILBARG D.: Boundary value problems for non-linear elliptic equations in n variables. Nonlinear Problems University of Wioeonsin Press. Madison (1963) 151-160.

[4] HAAR A.: Über das Plateausche Problem. Math. Ann. 97 (1927) 124-258.

[5] JENKINS H.-SERRIN J.: The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions. J. Reine und Angw. Math. 229 (1968) 170-187.

[6] LADYZHENSKAYA A.-URALTSEVA: Linear and Quasi linear elliptic equations. Academic Press London 1968.

[7] MIRANDA M.: Un principio di massimo forte per le frontiere minimali... Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 45 (1971) 355-366.

[8] RADO' T.: The problem of the least area and the problem of Plateau. Math. Z. 32 (1930) 763-796.

[9] STAMPACCHIA G.: On some multiple integral problems in the calculus of varietions. Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963) 382-422.